Poglavlje 1

Dvostruki integral

1.1 Dvostruki integral u pravokutnim koordinatama

Dvostrukim integralom neprekidne funkcije $f(x, y)$ preko ograđenog zatvorenog područja S nazivamo limes dvostruke integralne sume:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max\ \Delta x_i \to 0 \\ \max\ \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k$$

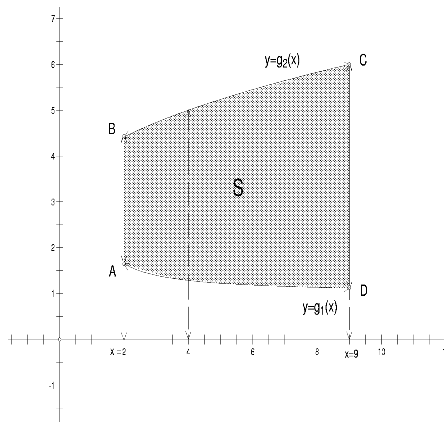
gdje je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ i $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ a točke (x_i, y_k) pripadaju području S.

Kod dvostrukog integrala vrlo je bitno pravilno odrediti granice integracije. Imamo dva osnovna tipa područja integracije:

1) Područje integracije S omeđeno je s lijeva i s desna pravcima $x = a$ i $x = b$ $(a < b)$ a odozdo i odozgo neprekidnim krivuljama $y = g_1(x)$ i $y = g_2(x)$, $g_1(x) \leq g_2(x)$ (vidi sliku). Očito se u području S varijabla x mijenja od a do b a varijabla y od $g_1(x)$ do $g_2(x)$. Integral $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$ sada postaje:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Primjetimo da je veličina x u integralu $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ konstantna jer integriramo po y. (vidi sliku 1.1)

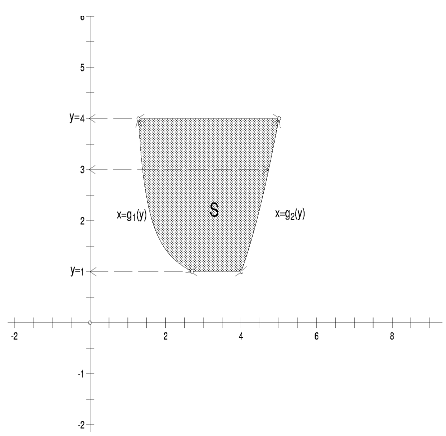


Slika 1.1: U području S, x se mijenja od 2 do 9 a za fiksan x, y se mijenja od $g_1(x)$ do $g_2(x)$.

2) Područje integracije S omeđeno je odozgo i odozdo pravcima $y = d$ i $y = c$, $(c \leq d)$, a slijeva i zdesna neprekidnim krivuljama $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, $(g_1(y) \leq g_2(y))$. Ovdje se y mijenja od c do d a x od $g_1(y)$ do $g_2(y)$. Integral $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$ sada možemo prikazati kao:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx$$

i tu veličinu y u integralu $\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx$ smatramo konstantnom.



Slika 1.2: U području S, y se mijenja od 1 do 4 a za fiksan y, x se mijenja od $g_1(y)$ do $g_2(y)$.

Svako područje integracije nastojimo razdijeliti na područja gornjih dvaju tipova.

Primjer 1 Izračunajte višestruki integral: $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)dx$.

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)dx &= \text{ u unutarnjem integralu } y \text{ je konstanta } = \\ &= \int_0^2 \left(\left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \Big|_0^1 \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \left(\frac{y}{3} + y^2 \Big|_0^2 \right) = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

Primjer 2 Izračunajte dvostruki integral: $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx$.

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx &= \text{ u unutarnjem integralu } y \text{ je konstanta } = \\ &= \int_{-3}^3 \left(\left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Big|_{y^2-4}^5 \right) dy = \\ &= \int_{-3}^3 \left(\frac{25}{2} + 10y - \frac{(y^2-4)^2}{2} - 2(y^2-4)y \right) dy = \\ &= \left(\frac{25}{2}y + 5y^2 - \frac{y^5}{10} + \frac{4}{3}y^3 - 8y - \frac{y^4}{2} + 4y^2 \right) \Big|_{-3}^3 = \ldots = \frac{504}{10}\end{aligned}$$

Primjer 3 Riješite integral: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^a r dr$.

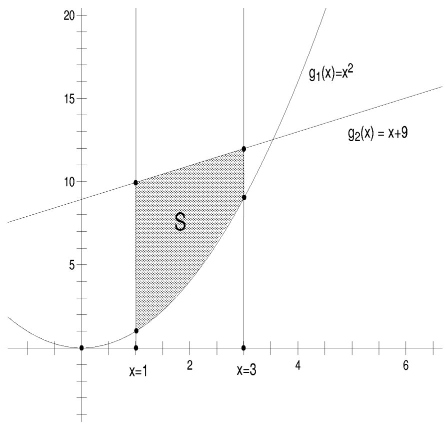
Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^a r dr &= \text{ u unutarnjem integralu } \varphi \text{ je konstanta } = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{a\sin\varphi}^a \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sin^2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\frac{1-\cos(2\varphi)}{2} \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^2\pi}{2}\end{aligned}$$

U slijedećim zadacima treba napisati krivulje koje omeđuju područje S po kojem se integrira i nacrtati to područje u koordinatnoj ravnini.

1) $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$

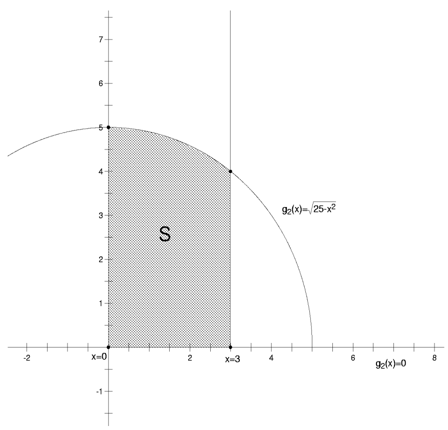
Rješenje: Područje integracije omeđeno je slijeva i zdesna pravcima $x=1$ i $x=3$ a odozdo i odozgo krivuljama $g_1(x)=x^2$ i $g_2(x)=x+9$.



Slika 1.3: U području S, x se mijenja od 1 do 3 a za fiksan x, y se mijenja od $g_1(x) = x^2$ do $g_2(x) = x + 9$.

2) $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$.

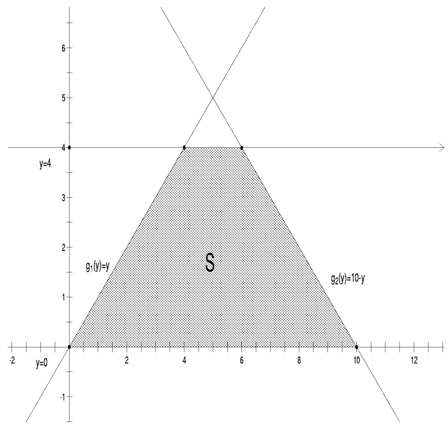
Rješenje: Područje integracije omeđeno je slijeva i zdesna pravcima $x = 0$ i $x = 3$ a odozdo i odozgo krivuljama $g_1(x) = 0$ i $g_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.



Slika 1.4: U području S, x se mijenja od 0 do 3 a za fiksan x, y se mijenja od $g_1(x) = 0$ do $g_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

3) $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x,y)dx$.

Rješenje: Ovo je integral drugog tipa, područje integracije omeđeno je odozdo i odozgo pravcima $y = 0$ i $y = 4$, a slijeva i sdesna krivuljama (također pravcima) $g_1(y) = y$ i $g_2(y) = 10 - y$.



Slika 1.5: U području S, y se mijenja od 0 do 4 a za fiksan y, x se mijenja od $g_1(y) = y$ do $g_2(y) = 10 - y$.

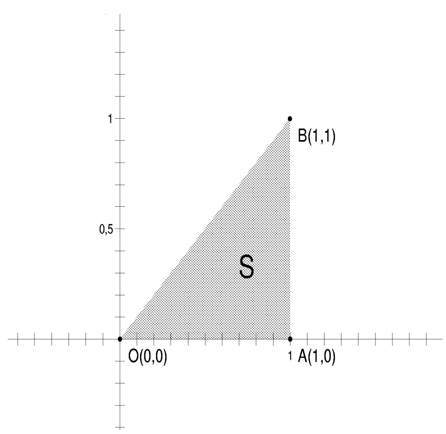
Zadatak 1 Odredite granice integracije u oba poretka za dvostruki integral

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$$

ako je:

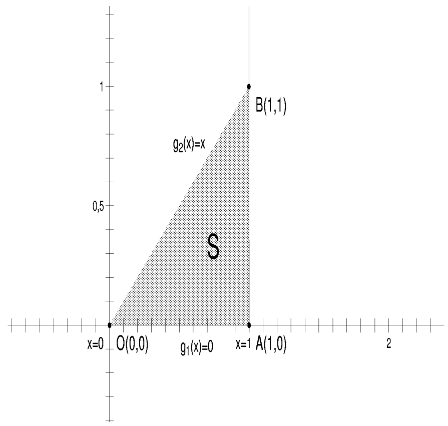
1) S trokut s vrhovima $O(0,0)$, $A(1,0)$ i $B(1,1)$.

   Rješenje: Prvo skiciramo područje integracije kako bismo lakše odredili granice:



Slika 1.6: Trokut sa vrhovima $O(0,0)$, $A(1,0)$ i $B(1,1)$.

Radimo prvo integraciju prvog tipa, x očito ide od 0 do 1. Da bismo odredili kako se mijenja y za fiksni x treba nam samo jednadžba pravca kroz točke O i B koji čini gornju granicu integracije (donja granica je, jasno, $g_1(x) = 0$).

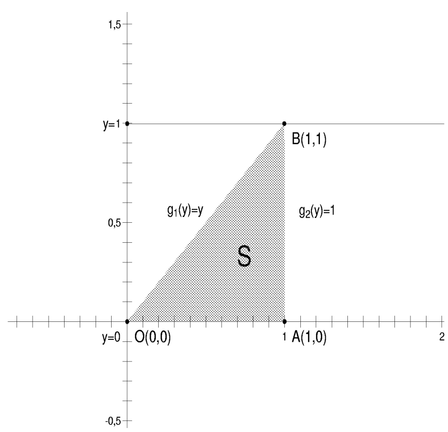


Slika 1.7: Jednadžbe krivulja za integraciju prvog tipa.

Jednadžba pravca glasi $y = x$ pa imamo da je $g_2(x) = x$ i konačno:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy.$$

Sada mijenjamo poredak integracije, odnosno prelazimo na integral drugog tipa. Iz slike je vidljivo da y također ide od 0 do 1 a da bi odredili granice od x za fiksni y, treba nam pravac kroz točke 0 i B koji čini lijevu među. Jednadžba tog pravca glasi (sada je y fiksiran, prisjetimo se) $x = y$ pa je $g_1(y) = y$. Desna granica je, očito, pravac $x = 1$ tj. konstantna funkcija $g_2(y) = 1$.



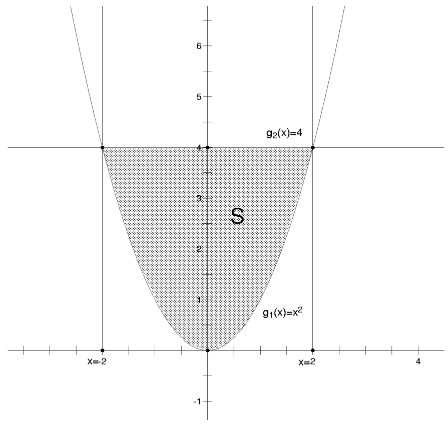
Slika 1.8: Jednadžbe krivulja za integraciju drugog tipa.

Dakle, imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx.$$

2) S odsječak parabole $y = x^2$ omeđen tom parabolom i pravcem $y = 4$.

Rješenje: Skiciramo područje S i unosimo potrebne podatke za integraciju prvog tipa:

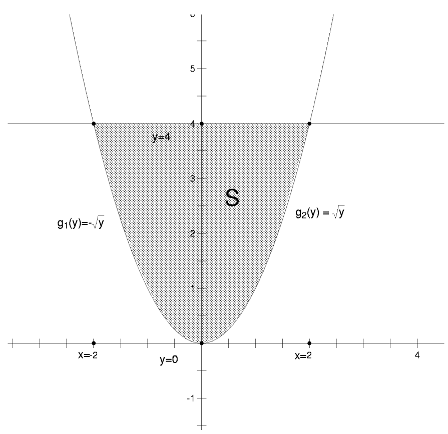


Slika 1.9: Područje S. Vidljivo je da x ide od -2 do 2, a da se y pri tome mijenja od $g_1(x) = x^2$ (donja granica), do $g_2(x) = 4$ (gornja granica).

Na slici je vidljivo da x ide od -2 do 2 a y je za fiskni x ograničen krivuljama $g_1(x) = x^2$ i $g_2(x) = 4$. Stoga imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy.$$

Gledamo drugi poredak integracije, sada se prvo mijenja y od 0 do 4, a onda za fiksni y, integriramo po x-u od $-\sqrt{y}$ do $\sqrt{y}$.



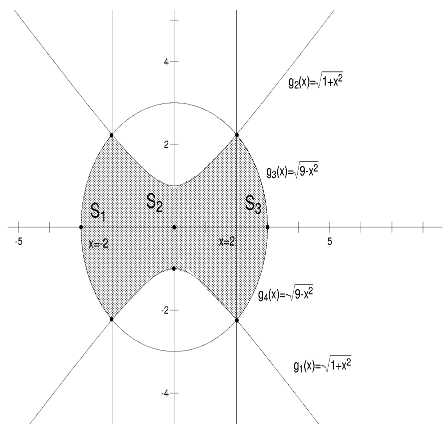
Slika 1.10: Područje S. Sada y ide od 0 do 4, a x se pri tome mijenja od $g_1(y) = -\sqrt{y}$ (donja granica), do $g_2(y) = \sqrt{y}$ (gornja granica).

Imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

3) S područje omeđeno hiperbolom $y^2 - x^2 = 1$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 9$ (ima se u vidu područje koje sadrži ishodište koordinatnog sustava).

Rješenje: Skiciramo područje s podacima za integraciju prvog tipa i pri tome uzimamo u obzir da se naše krivulje sijeku u točkama $(2, \sqrt{5})$, $(2, -\sqrt{5})$, $(-2, \sqrt{5})$, $(-2, -\sqrt{5})$ što se lagano dobije izjednačavanjem jednadžbi $y^2 = 1 + x^2$ i $y^2 = 9 - x^2$. Sada primjećujemo da se područje S mora razbiti na tri područja prvog tipa, S_1, S_2 i S_3. Integriramo po sva tri područja i rezultat zbrajamo.



Slika 1.11: Područje S sastoji se od tri područja prvog tipa S_1, S_2 i S_3 pa integriramo po svakom od njih i rezultat je zbroj tih integrala.

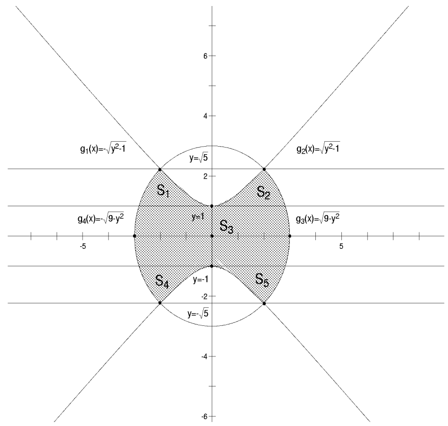
Dakle, imamo:

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} f(x,y)dxdy &= \iint_{(S_1)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_2)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_3)} f(x,y)dxdy = \\
&= \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy + \\
&+ \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy.
\end{aligned}$$

Za integraciju drugog tipa imamo sliku:

Kao i u gornjem primjeru, područje S raspada se na pet područja drugog tipa, pa integiramo po svakom od tih područja i rezultat je zbroj tih integrala:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint_{(S_1)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_2)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_3)} f(x,y)dxdy +$$



Slika 1.12: Područje S sastoji se od pet područja drugog tipa.

$$
\begin{aligned}
&+ \iint_{(S_4)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_5)} f(x,y)dxdy = \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx + \\
&+ \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx + \\
&+ \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx
\end{aligned}
$$

Zadatak 2 Promijenite poredak integriranja u slijedećim dvostrukim integralima:

1) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$,

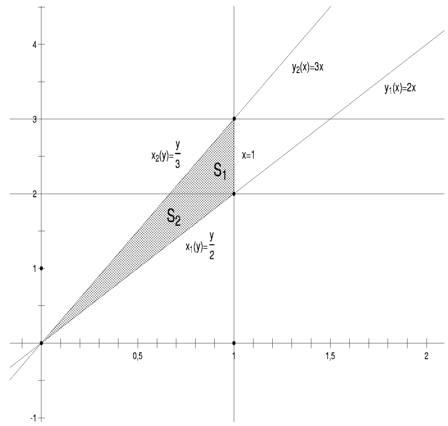
2) $\int_{-\sqrt{2}}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$,

3) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

Rješenje:

1) Skiciramo područje integracije, x ide od 0 do 1, a za fiksni x, y se mijenja od $2x$ do $3x$.

   Ako sada promijenimo poredak integracije, dakle, integriramo prvo po y, a onda po x, slika pokazuje da područje S treba razbiti na dva osnovna područja za integraciju drugog tipa.

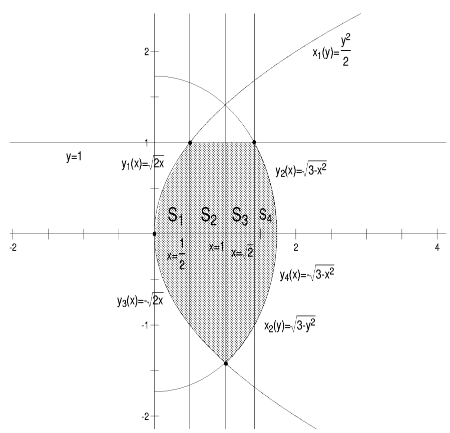


Slika 1.13: Područje integracije.

Stoga imamo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy &= \iint_{(S_1)} f(x,y)dydx + \iint_{(S_2)} f(x,y)dydx = \\
&= \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx.
\end{aligned}
$$

2) Crtamo područje integracije:



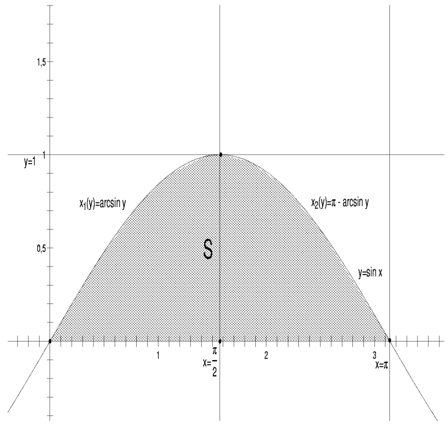
Slika 1.14: Područje integracije.

Sada vidimo da u obrnutom poretku integriranja ponovno moramo razbijati područje na četiri osnovna dijela pa redom imamo:

$$
\int_{-\sqrt{2}}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{1} +
$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{1} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}$$

3) Prikazujemo područje u koordinatnoj ravnini:



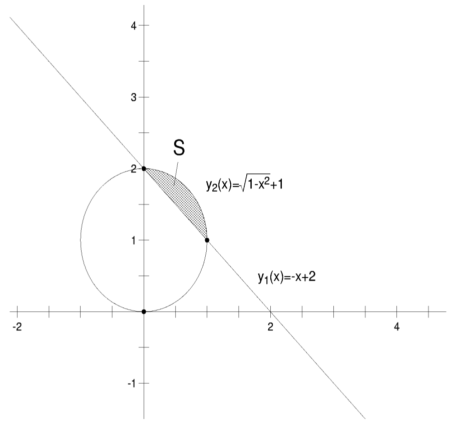
Slika 1.15: Područje integracije.

Vidimo da, pri promijeni poretka integracije, ponovno imamo samo jedno osnovno područje S pa je:

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy \quad = \quad \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)dx.$$

Zadatak 3 Izračunajte dvostruki integral $\iint_{(S)} xdxdy$ gdje je S područje omeđeno pravcem koji prolazi točkama $A(2,0)$, $B(0,2)$ i lukom kružnice $x^2+(y-1)^2 = 1$.

Rješenje: Jednadžba pravca koji prolazi točkama A i B glasi: $y = -x + 2$. Crtamo sliku:



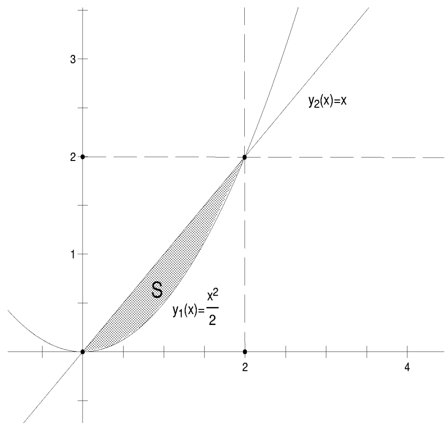
Slika 1.16: Područje integracije.

Možemo primjeniti bilo koji tip integracije, mi ćemo riješiti zadatak pomoću prvog. Pravac i kružnica sijeku se u točkama $(0,2)$ i $(1,1)$. To se lako dobije rješavanjem jednadžbe $x^2+(-x+1)^2=1$ koja se dobije uvrštavanjem jednadžbe pravca $y=-x+2$ u jednadžbu kružnice $x^2+(y-1)^2=1$. Sada je sa slike vidljivo da imamo:

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} xdxdy &= \int_0^1 dx \int_{-x+2}^{\sqrt{1-x^2}+1} xdy = \int_0^1 \left(xy\Big|_{-x+2}^{\sqrt{1-x^2}+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 (x(\sqrt{1-x^2}+1)-x(-x+2))dx = \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2}+x^2-x)dx = \\ &= \left(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Zadatak 4 Izračunajte dvostruki integral $\iint_{(S)} \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$ gdje je S područje omeđeno parabolom $y=\frac{x^2}{2}$ i pravcem $y=x$.

Rješenje: Skiciramo područje integracije:



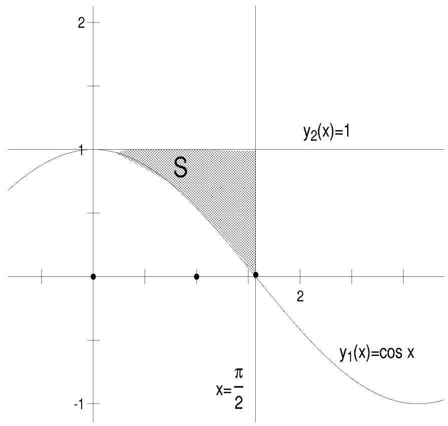
Slika 1.17: Područje integracije.

Zadane krivulje sijeku se u točkama $(0,0)$ i $(2,2)$ što je vidljivo sa slike, a lagano se dobije riješavanjem jednadžbe $x = \frac{x^2}{2}$. Koristeći integraciju prvog tipa, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy &= \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^2 \left(\arctan \frac{y}{x}\bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{x} \right) dx = \\
&= \int_0^2 \left(\arctan 1 - \arctan \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{2} \right) dx = \\
&= \left(\frac{\pi}{4}x - x \arctan \frac{x}{2} + \ln\left(4+x^2\right) \right) \bigg|_0^2 = \ln 2
\end{aligned}$$

Zadatak 5 Izračunajte dvostruki integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4 dy$ i nacrtajte područje integracije.

Rješenje: Prvo crtamo područje integracije:



Slika 1.18: Područje integracije.

a zatim rješavamo integral:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4 dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{y^5}{5}\Big|_{\cos x}^{1} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5}(1-\cos^5 x)dx = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-(1-\sin^2 x)^2 \cos x)dx = \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x + 2\sin^2 x\cos x - \sin^4 x \cos x)dx = \\
&= \frac{1}{5}\left(x - \sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{15\pi - 16}{150}
\end{aligned}
$$

1.2 Dvostruki integral u polarnim koordinatama

Prisjetimo se veze između polarnih i pravokutnih koordinata:

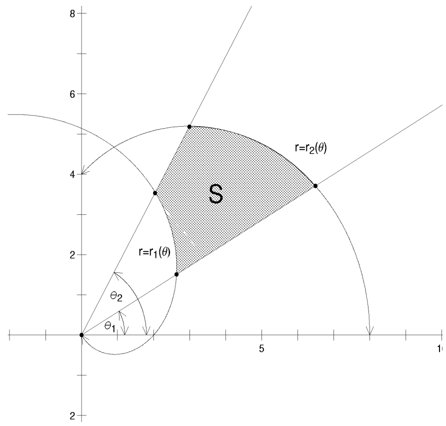
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Za dvostruki integral vrijedi sljedeća formula:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Područje S sada mora imati granice po r i po φ. Tu primjenjujemo sljedeće pravilo: ako je područje integracije S omeđeno zrakama $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) te krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$), onda dvostruki integral računamo po formuli:

$$\iint_{(S)} f(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r,\varphi) r dr.$$



Slika 1.19: Osnovno područje integracije u polarnim koordinatama.

Ako S nema taj oblik, onda ga, kao i kod pravokutnih koordinata, moramo razdijeliti na područja takvog oblika.

Primjer 4 Transformirajte sljedeće integrale u integrale s polarnim koordinatama pazeći pri tome na promjene granica integriranja.

1) $\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy$,

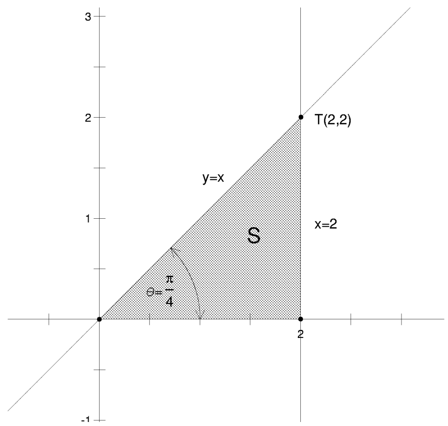
2) $\iint_{(S)} f(x^2+y^2)dxdy$,
gdje je S područje omeđeno pravcima $y=x$, $y=-x$ i $y=1$.

3) $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$,
gdje je S područje omeđeno lemniskatom

$$(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2).$$

Rješenje:

1) Prvo moramo skicirati područje integracije i odrediti njegove granice u polarnim koordinatama. Jednažba pravca $x=2$ u polarnim koordinatama glasi: $r\cos\theta = 2$ tj. $r = \frac{2}{\cos\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Zraka $y=x$, $x \ge 0$, glasi $\theta = \frac{\pi}{4}$ jer sve točke na tom pravcu imaju taj kut. Dakle, imamo:

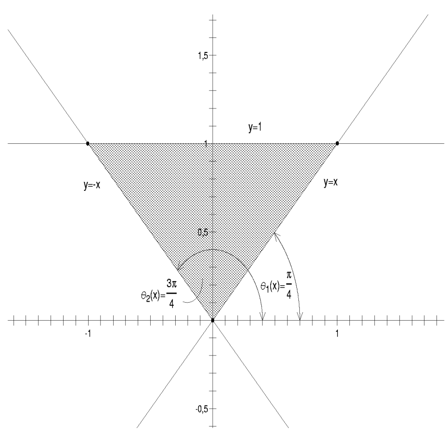


Slika 1.20: Područje integracije.

Sada je vidljivo da, u polarnim koordintama, θ ide od 0 do $\frac{\pi}{4}$, a, za fiksni $theta$, r se mijenja od 0 do $\frac{2}{\cos\theta}$. Stoga je:

$$\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

2) Crtamo područje integracije:



Slika 1.21: Područje integracije.

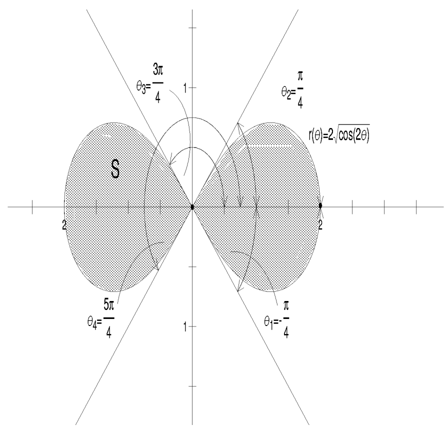
Kut θ se očito mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{3\pi}{4}$, a radijus r od 0 do $\frac{1}{\sin\theta}$, $0 < \theta < \pi$, što je i jednadžba pravca $y = 1$ u polarnim koordinatama. Ako još primjetimo da je $f(x^2+y^2) = f(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = f(r^2)$ u polarnim koordinatama, onda imamo:

$$\iint_{(S)} f(x^2+y^2)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r^2)rdr.$$

3) Tražimo jednadžbu lemniskate $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$ u polarnim koordinatama. Znamo da je $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$ pa to uvrštavamo u zadanu jednadžbu i dobivamo:

$$\begin{aligned}
(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2 &= 4(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) \\
\Rightarrow \quad r^4 &= 4r^2(2\cos^2\theta - 1) \qquad /r^2 \\
\Rightarrow \quad r^2 &= 4(\cos(2\theta) \\
\Rightarrow \quad r &= 2\sqrt{\cos(2\theta)}
\end{aligned}$$

Crtamo područje:



Slika 1.22: Područje integracije.

Vidljivo je da se kut θ mijenja od $-\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{4}$ i od $\frac{3\pi}{4}$ do $\frac{5\pi}{4}$ (što dobivamo rješavajući jednadžbu $r = \cos(2\theta) \geq 0$). Za fiksni θ, r se mijenja od 0 do $2\sqrt{\cos(2\theta)}$. Stoga imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

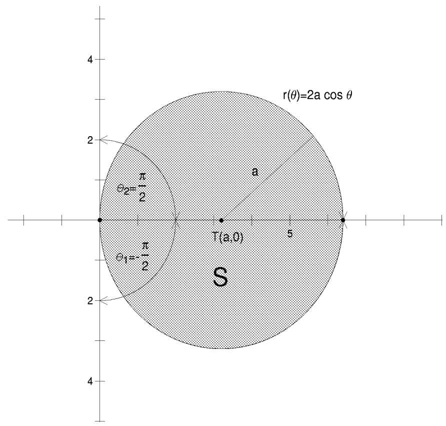
Zadatak 6 Prijelazom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

ako je S područje omeđeno kružnicom $x^2+y^2 = 2ax$ gdje je $a > 0$.

Rješenje: Svodimo na puni kvadrat izraz $x^2+y^2 = 2ax$ i dobivamo $(x-a)^2+y^2 = a^2$ iz čega je odmah vidljivo da se zaista radi o kružnici sa središtem u $T(a,0)$ radijusa a. Tražimo njenu jednadžbu u polarnim koordinatama:

$$\begin{aligned}
r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta &= 2ar\cos\theta \\
\Rightarrow \quad r^2 &= 2ar\cos\theta \quad / \\
\Rightarrow \quad r &= 2a\cos\theta
\end{aligned}$$



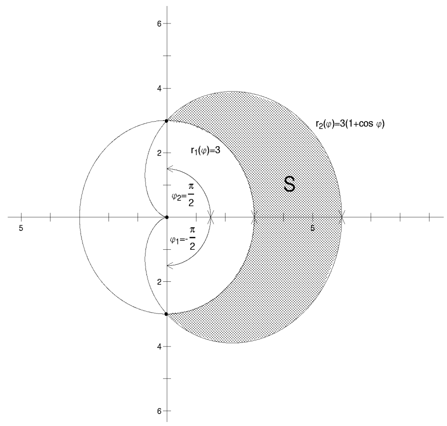
Slika 1.23: Područje integracije.

Sada crtamo tu kružnicu:
Kut θ mijenja se od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, a za fiksni θ, r ide od 0 do $2a\cos\theta$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\cdot rdr \quad (\text{jer } \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2}=r) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2a\cos\theta} \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\left(8a^3\cos^3\theta\right) d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta = \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta = \\
&= \frac{8a^3}{3}\left(\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) - \frac{8a^3}{9}\left(\sin^3\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{32a^3}{9}
\end{aligned}$$

Zadatak 7 Izračunajte dvostruki integral funkcije $f(r,\varphi) = r$ u području omeđenom kardioidom $r = 3(1+\cos\varphi)$ i kružnicom $r = 3$ (misli se na područje koje ne sadrži ishodište).

Rješenje: Krivulje koje omeđuju područje integracije već su zadane u polarnim koordinatama pa možemo odmah crtati sliku:



Slika 1.24: Područje integracije.

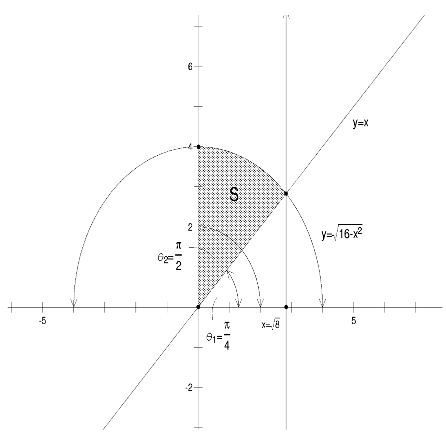
Sada imamo:

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} f(r,\varphi) r dr d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{3}^{3(1+\cos\varphi)} r\cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_{3}^{3(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi = \\ &= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((1+\cos\varphi)^3-1) d\varphi = \ldots = 66+27\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Zadatak 8 Prijelazom na polarne koordinate izračunajte :

$$\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

Rješenje: Iz integrala vidimo da se x mijenja od 0 do $2\sqrt{2}$, a za fiksni x, y ide od 0 do $\sqrt{16-x^2}$. Prema tome, radi se o sljedećem području:



Slika 1.25: Područje integracije.

Ako pogledamo područje u polarnim koordinatama, vidimo da se θ mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$ a za fiksno θ, r ide od 0 do 4 jer je jednadžba kružnice $x^2+y^2=16$ u polarnim koordinatama glasi $r=4$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^4 \sqrt{r^2}rdr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^4 r^2dr = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\bigg|_0^4\right) d\theta = \frac{64}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{16}{3}\pi\end{aligned}$$

1.3 Izračunavanje površina likova

1) **Površina u pravokutnim koordinatama:** površina područja S dana je formulom:

$$P_S = \iint_{(S)} dxdy$$

što se, ako je S definirano nejednadžbama $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$, svodi na dvostruki integral:

$$P_S = \iint_{(S)} dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy.$$

Primjetimo da je:

$$\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \quad = \quad \int_a^b \left(y\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)}\right) = \int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

što je formula za površinu (omeđenu krivuljama $x=a, x=b$ i $y=f_1(x), y=f_2(x)$) koju znamo otprije (vidi poglavlje određeni integral).

2) **Površina u polarnim koordinatama:** površina područja S dana je formulom:

$$P_S = \iint_{(S)} rdrd\theta,$$

što se, ako je S definirano nejednadžbama $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$, svodi na polarni integral:

$$P_S = \iint_{(S)} rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr.$$

Primjer 5 Skicirajte područja kojima su površine izražene integralima:

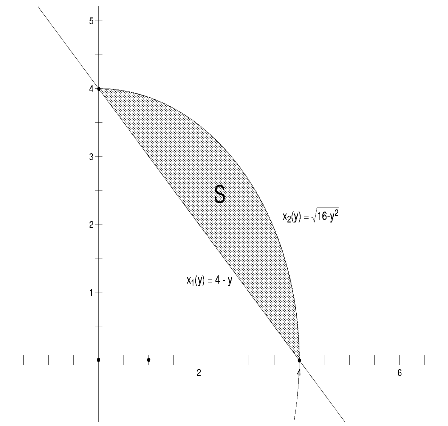
1) $\int_0^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx$,

2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} rdr$

Izračunajte te površine.

Rješenje:

1) Vidimo da se y mijenja od 0 do 4, a x (za fiksno y) od $4-y$ do $\sqrt{16-y^2}$. Dakle, imamo:

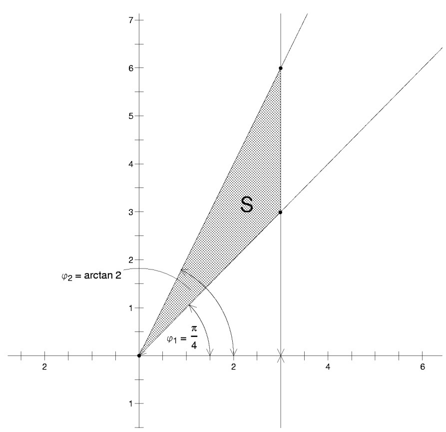


Slika 1.26: Područje integracije.

Sada je površina:

$$\begin{aligned}\int_0^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx &= \int_0^4 \left(x\Big|_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} \right) dy = \int_0^4 (\sqrt{16-y^2} - 4 + y) dy = \\ &= \frac{y}{2}\sqrt{16-y^2} + 8 \arcsin \frac{y}{4} - 4y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = 4\pi - 8\end{aligned}$$

2) Ovdje se kut mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\arctan 2$, a za fiksni kut, radijus ide od 0 do $\frac{3}{\cos\varphi}$. Crtamo to područje:



Slika 1.27: Područje integracije.

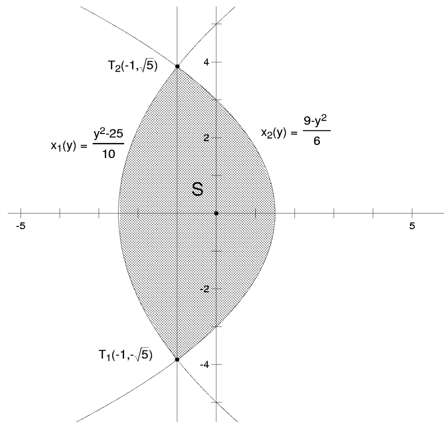
Još ostaje izračunati integral:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} r dr &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} \right) d\varphi = \frac{9}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \\ &= \frac{9}{2} \left(\tan\varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \right) = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Zadatak 9 Nađite površinu omeđenu parabolama:

$$y^2 = 10x + 25 \qquad \text{i} \qquad y^2 = -6x + 9.$$

Rješenje: Da bi znali nacrtati traženu površinu, prvo trebamo odrediti presjek danih krivulja. Rješavajući jednadžbu $10x + 25 = -6x + 9)$ odmah vidimo su jedine točke presjeka $T_1(-1, \sqrt{15})$ i $T_2(-1, -\sqrt{15})$. Sada imamo:



Slika 1.28: Područje integracije.

Sa slike vidimo da je bolje integrirati prvo po y, a onda po x, jer tako ne moramo razbijati područje na dva komada. Računamo površinu od S:

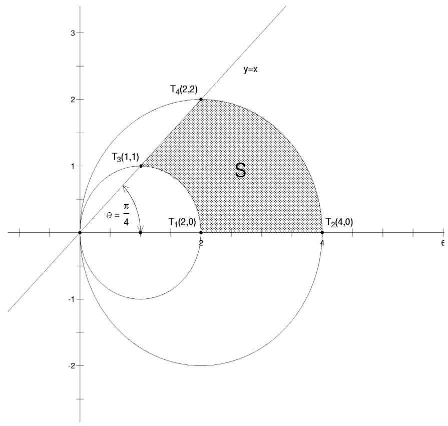
$$P_S = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(x \Big|_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} \right) dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{6} + \frac{25-y^2}{10} \right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \frac{60-4y^2}{15} dy = \ldots = \frac{16}{3}\sqrt{15}$$

Zadatak 10 Prelaskom napolarne koordinate nađite površinu omeđenu krivuljama:

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x \quad \text{i} \quad y = 0.$$

Rješenje: Svođenjem na puni kvadrat jasno je da su prve dvije krivulje kružnice i to redom: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, i $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Crtamo krivulje i nalazimo točke presjeka te dobivamo:



Slika 1.29: Područje integracije.

Trebaju nam jednadžbe kružnica u polarnim koordinatama. Veća kružnica glasi:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4x \quad \Rightarrow \\ r_1^2 &= 4r_1 \cos\theta \quad \Rightarrow \\ r_1 &= 4\cos\theta. \end{aligned}$$

Analogno tome, za manju kružnicu dobivamo:

$$r_2 = 2\cos\theta.$$

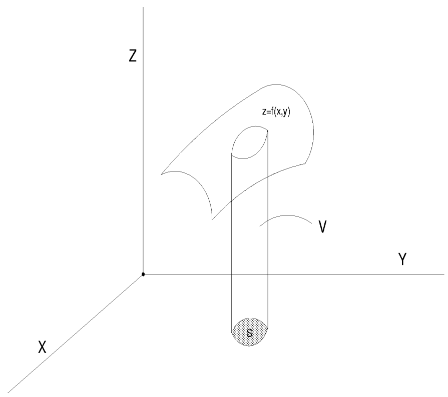
Kako kut ide od 0 do $\frac{\pi}{4}$ (jer je kut pravca $y = x$ sa x-osi upravo $\frac{\pi}{4}$), dobivamo za površinu od S:

$$\begin{aligned} P_S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r dr &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \right) d\theta = \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \\ &= 3 \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

1.4 Računanje volumena tijela

Volumen cilindroida koji je omeđen odozgo plohom $f(x, y)$, odozdo ravninom $z = 0$ i koji u toj ravnini izrezuje omeđeno područje S (vidi sliku), dan je sa:

$$V = \iint_{(S)} f(x, y) dx dy.$$



Slika 1.30: Cilindroid sa bazom S.

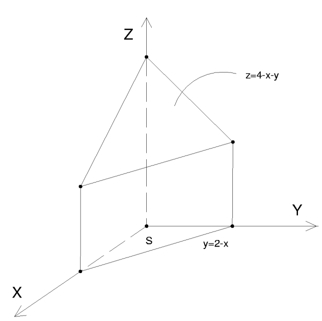
Zadatak 11 Nacrtajte tijela kojima su volumeni izraženi dvostrukim integralom:

a) $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-x-y)dy$,

b) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$.

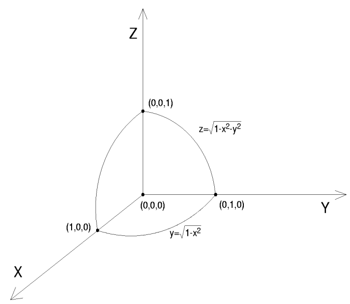
Rješenje:

a) Vidimo da je u pitanju cilindroid odozgo omeđen sa ravninom $z = 4-x-y$ i sa bazom u obliku trokuta u $z = 0$ ravini kojem je jedna stranica x-os od 0 do 2, druga y-os od 0 do 2 (tu pravac $y = 2-x$ siječe y-os) a treća pravac $y = 2-x$. Crtamo sliku:



Slika 1.31: Cilindroid sa trokutastom bazom omeđen ravninom $z = 4-x-y$.

b) Ovdje je baza prva četvrtina kruga $x^2 + y^2 = 1$. To slijedi iz činjenice da x ide od 0 do 1, a y od 0 do $\sqrt{1-x^2}$. Ako pogledamo gornju među cilindroida, plohu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, vidimo da se radi o jediničnoj sferi. Dakle, u pitanju je jedan osmina sfere i to ona koja se nalazi u prostornom kvadrantu u kojem su i x i y i z pozitivni.



Slika 1.32: Osmina sfere u oktantu gdje su sve koordinate pozitivne.

Zadatak 12 Nađite volumen tijela omeđenog eliptičkim paraboloidom $z = 2x^2 + y^2 + 1$, ravninom $x + y = 1$ i koordinatnim ravninama.

Rješenje: Gornja granica je zadani paraboloid, a omeđenost koordinatnim ravninama i ravninom $x + y = 1$ (koja je okomita na ravninu $z = 0$) nam govori da je baza trokut koji čine pravci $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$ u $z = 0$ ravnini. Vrhovi tog trokuta su ishodište, $(1, 0, 0)$, i $(0, 1, 0)$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned} V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1) dy &= \int_0^1 \left(2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(2x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + 1 - x\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(3x^2 - \frac{7}{3}x^3 - 2x + \frac{4}{3}\right) dx = \left(x^3 - \frac{7}{12}x^4 - x^2 + \frac{4}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zadatak 13 Tijelo je omeđeno cilindrom $x^2 + z^2 = 1$ i ravninama $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $y = x$. Nađite njegov volumen.

Rješenje: Vidimo da u jednadžbi valjka nema koordinate y. To znači da je za svako $y = const$ presjek valjka s tom ravninom krug $x^2 + y^2 \leq 1$ pa zaključujemo da je to valjak duž osi y. Ravnine $y = 0$ i $y = x$ govore nam da po y integriramo od 0 do x. Da bi našli granice za x, treba provjeriti gdje valjak siječe ravninu $z = 0$. To je očito u točkama ± 1. Jer je $x = 0$ međa, vidimo da treba uzeti jednu vrijednost, npr. onu pozitivnu, tj. $x = 1$. Još ostaje primjetiti da za z treba uzeti $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$. Sve skupa

$$V = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1 - x^2} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{1 - x^2} y\Big|_0^x\right) dx =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}x)dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$